

## 数学を学ぶことの素晴らしさを感じる、より良い課題作りのために

—— 数学Ⅲ 微分法（自然対数の底「 $e$ 」についてのアプローチ） ——

（実践者 新潟県立新井高等学校 成田 裕子）

数学の学習は、小学校、中学校と内容が高度になるにつれ、日常の事象から離れた抽象的な題材が多くなる。「数学Ⅲ」は高等学校の数学の中で、最も抽象的且つ高度な内容を含む。中でも自然対数の底「 $e$ 」は、子どもたちが分からないまま暗記に走りやすい事項である。

本時では自然対数の底「 $e$ 」について、教科書より深く掘り下げたり、身近な場面に使われている題材を扱うことで、暗記に走りやすい無味乾燥な学習を、自分の身に引きつけさせ、理数の面白さや深く追究する楽しさを味わわせたい。そして、高度な数学を生きた形で学ぶことにより、子どもたちに自ら学ぶ姿勢を取り戻させることを試みる。

子どもたちは、授業後、深く学問を究めることの楽しさ、心地よさを感じ、もっと学びたいという気持ちが湧き起こったと感想を述べた。高等学校数学の最高峰「数学Ⅲ」においてさえ、あるいは「数学Ⅲ」だからこそ、日常の文脈に近い中身を扱う必要性があり、日常の文脈に入り込んだ理数の面白さを楽しめるのだということを実証した。

### 1 「理数の面白さや深く追究する楽しさなどを味わわせる」ための構想

#### 1-1 全体構想

事象の考察のための道具として数学を捉え、子どもたちに習得させることが、結局、理数の面白さや深く追究する楽しさなどを味わわせることに繋がる。数学の基本事項についての習熟が無いところには面白さや楽しさは無く、深く追究する喜びも無いが、無機的・便宜的な公式の適用練習（ドリル）ばかりでは、数学の有用性が感じにくいことも事実である。数学の有用性を認識でき、具体的な事象の考察に活用するような、身近な場面を可能な限り設定することで、意味のある学習をしているのだという見通しをもって楽しく学習し、より一層深く学習したいという意欲を喚起したい。

高等学校の数学では抽象度の高い内容を教師からの一方的な講義形式で学習することが常である。大学受験を控え、学習しなければならないことの量も多く、どうしても日常の文脈から遠い学習となりがちである。「こんなことをやって何の役に立つのか。」「定期考査はその場しのぎの暗記でクリア。」「受験が終われば数学との関わりは終了。」といった声が聞かれる現状に疑問を感じ、なんとか、子どもたちに理数の面白さや、深く追究する楽しさを味わわせることはできないかと考えてきた。

「数学Ⅲ」は高等学校の数学の中でも最も抽象的かつ、高度な内容を含むものである。選択者が少ないため、教師も数年に一度しか担当しない。その年の経験が次に担当する際に十分に活かされない。そのような状況の中「数学Ⅲ」の学習項目の中で、子どもたちにとって最も分かりにくく、訳の分からないまま仕方なしに暗記することが多いのが、この自然対数の底「 $e$ 」である。

本時ではいつも、十分に指導できないもどかしさを感じていた自然対数の底「 $e$ 」を取り上げ、教科書レベルより深く掘り下げたり、身近な場面に使われている題材を扱うことで、暗記に走りやすい無味乾燥な学習を、自分の身に引きつけさせ、理数の面白さや深く追究する楽しさなどを味わわせたい。そして、高度な数学を生きた形で学ぶことにより、もう一度子どもたちに、自ら学ぶ姿勢を取り戻させることを試みる。また、日常の文脈にのった学習が、今後も自然科学・人文科学等の研究に役立つことがあればよいと考え教材を選定した。

## 1-2 指導目標

「数学Ⅱ」の内容を更に発展、拡充させた極限、微分法及び積分法について理解を深め、将来、数学が必要な専門分野へ進もうとする生徒や、数学を深く学習したい生徒の知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに、それらを積極的に活用する態度を育てる。

I 数学への関心・意欲・態度	身近な事象を数学化し、積極的に数学を活用しようとする。自然対数の底「 $e$ 」に関心を持ち、対数関数や指数関数および、その導関数への関心を深めようとする。
II 数学的な見方や考え方	既習の無限等比数列の極限、自然対数の底「 $e$ 」を利用した微分法を基にして、事象を分析・整理し、明確に活用することができる。
III 数学的な表現・処理	実生活の様々な場面で自然対数の底「 $e$ 」が用いられていることを理解し、対数関数、指数関数の微分法を適用して数学的に考察したことを明確に表現することができる。
IV 数量、図形などについての知識・理解	自然対数の底「 $e$ 」が実社会に果たす役割を認識できる。実生活において、対数関数と指数関数の導関数を利用する過程が理解できる。数学的な考察が社会生活に有用であることを理解している。

## 2 授業の実際

### 2-1 本時における「理数の面白さや深く追究する楽しさなどを味わわせる」指導の構想

円周率「 $\pi$ 」は円周とその直径の比という非常に親しみやすいものであり、円の面積計算も含め、日常生活とも関連が深く、ごく自然に生徒の中に導入されてきている。弧度法については難易度が高いものの「数学Ⅲ」を選択する生徒にとってはまだ、捉えどころのある「温かい無理数」である。

それに対し、自然対数の底「 $e$ 」は「数学Ⅲ」を選択した生徒にとってさえ難しく、自分とは全く関係の無い、得体の知れない、「文字」の域から脱していない「冷たい数」である。微分の公式が次から次へと登場するこの単元の学習にあたり、先の見通しの立たない中での学習は無味乾燥なものになりがちで、生徒は無条件に暗記に走るうち、興味関心を失っていきやすいところである。「こんな事を学習してどうなるのか?」「何の役に立つのか?」という疑問が生徒の中に潜在的に存在しているものと思われる。このような状態に陥りやすい子どもたちの現状を「数学Ⅲ」においてさえも、数学的な中身を深めながら楽しく学習することへの改善が可能であることの実証を試みる。

そのため「冷たい数」である自然対数の底「 $e$ 」についてのトピックスを、

日常生活に関係している話題 → 数学的に深まる課題 → 日常生活に関係している話題

の順に教材を配置する。そして、今後の学習においても各単元の学習内容にはその裏側にとても奥深い世界が存在し、『学習を深めることでしかその面白さに到達できない。』ということに気付かせる。これはすなわち、『理数の面白さや深く追究する楽しさなどを味わわせる』ことであり、生徒が『自ら展望をもって学ぶ者』になる事を意味する。将来、数学が必要な専門分野へ進もうとする生徒を、数学世界の『意味の深みへ』と誘ない、学びの好循環を作っていければと考える。

## 2-2 授業の実際

導入 今日教科書から離れた視点から「数学Ⅲ」に取り組むことを説明。

### ①恐怖の高利貸し

#### 恐怖の高利貸し

ある生徒が高利貸しのおじいさんから「あなたのおじいさんが昭和の初期に借りた20円のお金を利子をつけて返してほしい。」と言われました。その利子は年利100%の複利です。借りてから60年が経過しています。この借金はどのくらいの額になっているでしょう。

また、厚さ0.1mmの1万円札を重ねたときどのくらいの高さになるでしょう。

プリント配布後、まず、最初に1万円札を積み重ねたときの高さについて予想を立てさせた。

意外にも、和気藹々と楽しそうに相談する場面が見られた。

- ①太陽までの距離（1億5000万km）より高い。（1名）
- ②富士山の高さ（3776m）くらいの高さ（10名）
- ③東京タワー（333m）くらいの高さ（5名）
- ④学校の校舎の高さ（12m）くらい（0名）

初発の予想では多めに見積もってか、富士山の高さと予想する者が多かった。

次に、複利計算について指導し、関数電卓（3台）を使わせて1年経過毎に計算を進め、60年後まで計算させた。途中、 $2^{10} \approx 1000$  を利用し計算を簡便化した。予想以上に大きく増えること、正の無限大 $\infty$ に発散、に近い状況になることを確認した。正解が「①太陽までの距離（1億5000万km）より高い」になったことは予想外だったようで素直な驚きがあった。

既習事項 無限等比数列の  $|r| > 1$  での極限值との関連性を話し、教科書で学んだことが使われていることを確認した。

### 《子どもたちの感想①》

- A** たった20円が60年間でとても大きな額のお金が変わることに驚きました。また、1万円を積み重ねると太陽にまで届く高さになることがとても驚きました。借金はしないようにした方がいいと改めて思いました。
- B** 面白半分に「太陽までの距離より高い」を選んだのに本当にそれくらいの高さになるとは思わなかった。
- D** たった20円が金利100%で60年後、1万円札を積み重ねて $2 \times 10^8$ の8乗kmくらいまでになるというのはとても恐ろしい。これは、ちりも積もれば山となるということわざがぴったりである。
- F** 本当に太陽までいくのか不思議だった。
- G** 20円が60年で二千万円まで増えるとは思わなかった。すごく面白かった。
- I** 高利貸しはとても恐ろしいものだと思います。
- J** もうちょっと現実味のある利子率にしてほしかった。
- K** 最初はそんなに増えるとは思わなかったけれど驚いた。意外におもしろかった。
- L** 金利が高いと年が経つにつれてどんどん増えていくので借りたら早く返すべきだと思った。
- N** 借りた20円が60年経つと太陽より高く1万円を積みかさやいけなくくらいに増えるというのは驚いた。複利計算では無限大に発散するので利子には気をつける。

高校数学では、授業中に感情が沸き起こるということはほとんどない。芸術や国語の授業のような感情の起伏をもって学ぶということはまず無い。理数の楽しさは問題を自分の身に引きつけ、自己との関係性を結んだ中で学習することではじめて味わえるものではないか。「恐ろしい」「驚いた」などの感情表現が見られ、既知のことわざを引いて、この事象に当てはめて考えたりする様子が見られたことは、自己と関連のあることとして生徒が学んでいる証拠であり、特筆に値する。

② 1万円はどこまで増える？

**1万円はどこまで増える？**  
 複利での借金がこんなに増えるのなら複利で貯金すれば大きく増やせるのでは？  
 しかし、増えるまで60年も待てない！そこでこんな事を考えてみました。  
 1万円を年利率100%で1年間預けると1年後には

これを半年複利と考え利息を半分にして2期預けると1年後には

3ヶ月毎の4回複利で利息は1/4にして4期預けると1年後には

どんどん増える増える・・・！！さて、1万円はどこまで増えるのでしょうか？  
 毎月毎の12回複利で利息は1/12にして12期預けると1年後には

毎日毎の365回複利で利息は1/365にして365期預けると1年後には

1000回複利で利息は1/1000にして1000期預けると1年後には

10000回複利で利息は1/10000にして10000期預けると1年後には

100000回複利で利息は1/100000にして100000期預けると1年後には

以下同様にしてh回複利で利息は1/hにしてh期預け、1年後の金額を考え  
 たとき、 $h \rightarrow \infty$  とすると

このような計算を『連続複利計算』と言います。  
 実際には、年利率100%という貯金は考えにくいですね。実際に年利率r%  
 で1年間預けたときの連続複利計算の結果はどうなるのでしょうか。

今度は、借金を貯金に変え、60年複利を1年間を分割する題材に変える。ルール  
 の転換を注意深く指導した。半年複利など、利息の付き方の意味をおさ  
 え、計算に支障が出ないようにした。べき乗の計算が可能な3台の関数電卓  
 を使わせたが、台数をもっと増やせば良かった。

徐々に値が2.718・・・に近づくが、教師からは「e」を誘導しなかつた。  
 生徒の中には自然対数の底「e」に気付きニコッと笑った子どももいた。

この題材の最初にも①恐怖の高利貸しと同じように子どもたちの予想を聞  
 いてみるべきであった。予想外に増えない事を確認し、実際の経済学に自然  
 対数の底「e」が使われていることを説明した。年利率がr%のケースも取  
 り上げ、教科書の「e」の計算の復習をした。



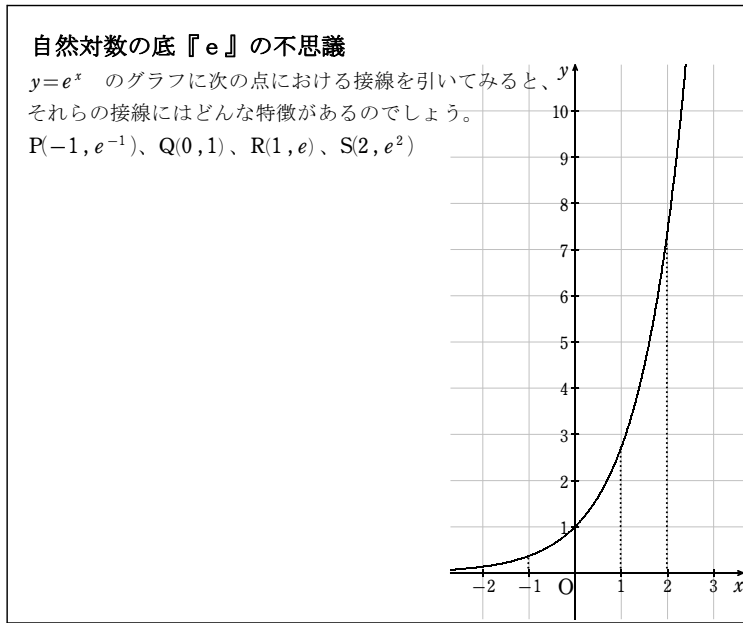
《子どもたちの感想②》

- A**最初は恐怖の高利貸しみたいになぞくお金が増えると思ったけど、やっていくうちに3万円かなと思った。結果は2.71828・・・万円になるのが不思議でした。
- B**どんどん金額が増えると思ったのにそんなにたくさんは増えなかった。世の中そんなに甘くないということを思い知らされました。
- C**3倍くらいまでは増えると思ったが、意外と増えなかった。
- D**連続複利計算をするとどんどん、 $e = 2.71828 \dots$ に近づいていくのは驚いた。
- E**2.71828・・・倍まで増えるとは思わなかったのでとてもおもしろい。
- F**はじめはどこまでもとてつもなく増えるかと思ったが、だんだん増え方が落ち着いてきたので3倍くらいまでかなあと思ったが、たったの「e」までだったのでショックだった。
- H**はじめはどこまで増えるのか不思議に感じていたが、よく見てみると見たことがある形だった事に気付いた。意外と増えない事を知っておもしろかった。
- K**最大でも「e」までしかいかないということを不思議に思った。
- M**短い時間で大きな効果を上げるのは難しい。

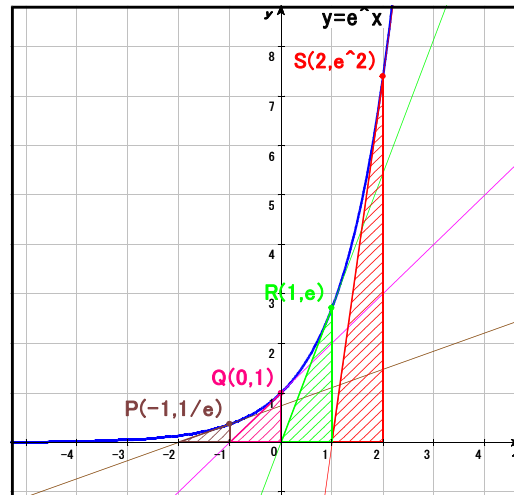
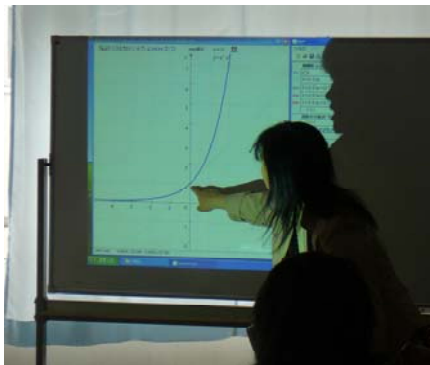
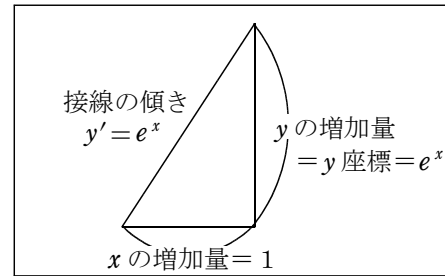
③自然対数の底「e」の不思議（接線）

$y = e^x$  のグラフの  $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2$  における接線の間隔について図示又は計算

などでその特徴を考察させた。x 軸と各接線の交点に着目させ、等間隔になることを発見できるよう導いた。



$y = e^x$  の導関数  $y' = e^x$  との関連から x 軸と各接線の交点が等間隔になることを説明できることを確認した。



《子どもたちの感想③》

- A**接線がきれいに引けていて不思議でした。言われるまで気が付かなかったけれど、言われてみるとスゴイなと思いました。
- C**よく分かりませんでした。
- E**グラフの接線が1ずつの間隔でx軸に落ちていくことが、すごくきれいだなと思った。
- F**x軸に等間隔で接線が落ちているのに気づけなくてショックだった。
- G**1ずつになることには気が付かなかった。
- H**接線が同じ間隔でx軸に落ちていることに気付いたときは、とてもビックリした。このままどこまでも接線を引いても、ちゃんと点を通るのが気になった。
- I**x軸に等間隔に落ちる！！
- K**x軸上の整数部分に全ての接線が通っていて、新しい発見ができた。
- L**x軸上の点が増え続けるのに驚いた。
- M**接線はきれいだった。
- N**きれいな整数のところを通るというのは驚いた。
- O**スクリーンを使ったのは分かり易かったので、グラフの時にまたやって欲しい。

④自然対数の底「e」の不思議（テイラー展開）

**自然対数の底『e』の不思議②**

関数  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  は無限等比級数の和の公式より

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^n + \dots$$

と  $x$  の累乗の関数（整関数）  
 の和で表すことが出来ます。（ただし  $-1 < x < 1$  の範囲に制限する。）  
 では、指数関数  $f(x) = e^x$  を整関数の和で表すとどのようになるでしょう。  
 $f(x) = e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n + \dots$  とすると  
 $f(0) = e^0 =$

$f'(x) =$   
 $f'(0) =$

$f''(x) =$   
 $f''(0) =$

$f'''(x) =$   
 $f'''(0) =$

以下同様に繰り返して  
 $a_4 =$                        $a_5 =$                       .....  $a_n =$

すなわち  
 $f(x) = e^x =$

$f(1) = e =$

いろいろな関数を整関数の和で表すことが出来ることを知り  $f(x) = e^x$  を整関数の和で表すことを試みた。

各整関数が微分可能であることから、第  $n$  次導関数が利用できることを確認した。

$f(x) = e^x$  をテイラー展開し、 $x = 1$  を代入して自然対数の底「e」の別表記を知る。

実際に関数電卓で階乗を計算し「e」の値を求めてみた。今回は「e」に成ることが分かっての計算であるのにもかかわらず、子どもたちにとっては、果たして本当に  $2.71828 \dots$  が出てくるのか、と期待しながらの楽しい計算であったようである。

授業中には発言はなかったため気が付かなかったのだが、子ども **J** の感想に「 $e^x$  を微分して  $e^x$  になる理由がわかった気がする。」とあった。教師の期待以上の成果が子どもたちの中から得られ、改めて子どもたちの可能性は教師の予想を超えていくのだと痛感させられた。



第  $n$  次導関数  $(x^n)' = nx^{n-1}$  を復習した。

自分で計算したことで教科書の定義  $e = \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}$  と比較して「e」が身近な存在となった。

《子どもたちの感想④》

- A** 「e」がすごく簡単な数の和で表すことが出来て、おもしろかったです。すごく不思議だな、と思いました。
- G** むしろ  $x^3$  以上のグラフの書き方に興味がある。
- H** 自然対数の底の値は、ちゃんと決まった式に展開できることを知って驚いた。
- I** 「e」になってくれると思っていました。なってくれて良かったです。
- J**  $e^x$  を微分して  $e^x$  になる理由がわかった気がする。
- K** こんな法則があつて驚いた。
- L** 「e」のことを詳しく知ることができた。
- M** 式だけ見ると近似には見えないけど、実際にグラフにすると驚くほど近かった。
- N** 実際に計算してみると「e」が  $2.71828 \dots$  になるということがわかった。
- O** 計算たのしかかったです。

⑤不得意科目は点数を上げやすい！！（効用関数のお話）

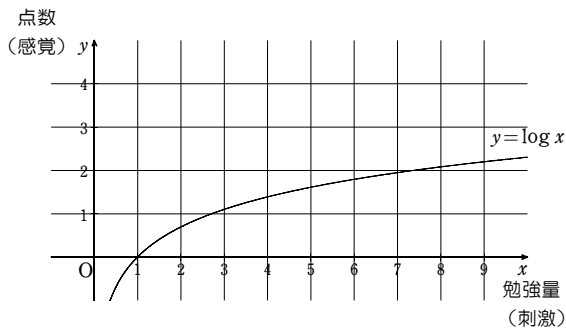
**不得意科目は点数を上げやすい！！**（効用関数のお話）

19世紀のドイツの心理学者・生物学者のウェーバーは、刺激の強さと感覚について幾つかの実験的法則を示しました。【ウェーバーの法則】  
その中の1つに

**刺激の変化に対する敏感度は、その時点の刺激の大きさに反比例する。**  
というのがあります。

- 例1) 音の刺激 物音ひとつしないところでは針1本落としただけでも音がしたことに気付くが電車通過中のガード下では、銃の音さえかき消される。  
例2) 食べ放題の焼き肉屋さんで、お腹がペコペコの時に食べた最初の牛肉100gともう満腹といった時に食べた最後の1皿の牛肉100gはありがたさが違う。  
例3) 豊作貧乏 ある作物が豊作で大量に採れ過ぎたとき、価格が暴落し、儲けがかえって減るので出荷せずに処分する。  
例4) 逆に「限定品」と銘打って少ない量、希少価値を持たせて販売し値が上がり上がるよう操作する。  
例5) スポーツ 100mを20秒で走る人に少しコツを教えれば記録を2、3秒縮めることは簡単だが、100mを10秒近くで走る人は記録を0.1秒縮めることも難しい。

**例6) 受験勉強とその効果** 点数が低いときは少しの勉強でも点が上がりがだんだん点が高い位置になるとそれ以上に上げるのが難しくなる。



これらの例の 敏感度 =  $\frac{\text{感覚の増加量}}{\text{刺激の増加量}}$  ですから、

敏感度（効果）はその時点の接線の傾きを見ればよいことになります。

ここで、 $y = \log x$  については、 $y' = \frac{1}{x}$  で、これが【ウェーバーの法則】

で示している事柄です。

**教訓**

自分の身近にある事柄が対数関数の微分で説明できることを知る。実生活の様々な場面で効用関数が使われておりその1つが対数関数であることを知る。

y軸に近いところと遠いところでの変化の割合の違いに着目させ、対数関数を微分することでその時どきの効果（敏感度）を知ることができることに気付かせる。また、 $y' = \frac{1}{x}$ （反比例）【ウェーバーの法則】になっていることを知り、数学の有用性を感じさせる。

実際には原点を通る対数関数になるよう補正する必要があることをコメントした。ここでの結果から、受験勉強では苦手科目を頑張らなければならないことに気付かせた。今の生徒にとって最も関心の高い事象で締めくくることが効果的と考えた。

教訓「受験勉強は苦手科目を頑張ることが効率がよい！！」

《子どもたちの感想⑤》

- A 苦手科目の方が点が伸びるから苦手科目から勉強しろと言われることはよくあったけど、今回グラフで見てすごく納得できました。
- C 苦手教科を頑張ろうと思った。
- D 受験勉強に通じる点があって良かった。
- E 日常生活に関することを学べて面白かったし、勉強になった。
- F 面白かった。これはよくある「あるある」だと思った。
- G ほとんどの教科が得意としないので、とりあえず特に苦手なものからやろうと思う。
- H グラフの形を見て受験勉強は苦しくなつてからが本番なんだとわかって少し安心した。
- I お腹が減っている時の方が、お肉のありがたみ分かるということなので、食べ物のありがたみを知るために、毎回食事の際は空腹にしておこうと思いました。
- J 心理学に興味があった。
- K こんな法則を考えた人はとても偉いと思った。
- M 普段、感覚的に感じていることも、数式にできるのはすごいと思った。
- N 苦手教科の方が伸びやすいというのは、法則になっているので、受験勉強は苦手教科からやった方が良かったと思った。
- O 苦手の教科をもっと勉強したいと思った。

### 3 実践の考察とまとめ

#### 3-1 実践の考察と評価

授業後、生徒に感想や学んだことを記入し提出させた。感想文及び授業中の生徒観察、授業後の生徒観察により以下の評価を試みた。

- 既習事項の無限等比数列の極限、微分法を基にして、事象を分析・整理し、活用することができたか。
- 既習事項の無限等比数列の極限や微分法を適用して数学的に考察したことを明確に表現することができたか。
- 普段の授業の際と比べて、数学への関心・意欲・態度はどう変化したのか。  
身近な事象を数学化し、積極的に数学を活用しようとする態度は生まれたのか。  
自然対数の底「 $e$ 」に関心を持ち、対数関数や指数関数およびその導関数への関心を深めようという意欲は湧いたのか。
- 自然対数の底「 $e$ 」が実社会に果たす役割を認識し、実生活において、対数関数と指数関数の導関数が利用されている過程を理解できたか。  
数学的な考察が社会生活に有用であることが認識されたか。

##### 3-1-1 身近な題材が興味関心を高めることに繋がったか。

###### ①「恐怖の高利貸し」②「1万円はどこまで増える？」について

「1万円はどこまで増える？」の際にも「恐怖の高利貸し」についてと同様に、金額の予想をさせた方がよかった。特に「初発の予想→途中の予想→結果の予想」と聞いてみると効果的だったと考えられる。予想と違ったときの驚き、予想と近かったときの満足感が学習を深める。教師側が結論  $2.71828 \dots = e$  を知っているために予想をさせることの効果を活かせなかった。しかし、子どもたちはそれでも「数値が爆発的に増えないこと」「収束する値が既知の値  $2.71828 \dots = e$ 」であることに十二分に驚いていた。一気に自然対数の底「 $e$ 」が身近な存在になった瞬間であった。

②「1万円はどこまで増える？」において、何回目かの区切れ目で「増え方がちょっぴり落ち着いてきた」との教師の発言を受け「にこっ」とした生徒は、「 $e$ 」についての気付きがあったと思われる。あくまでも自力で結果発表を待たずに気づけたことが、大きな満足感になって「にこっ」と笑ったのである。「数学Ⅲ」の授業では残念ながら、このような自己効力感を感じる場面が少ない。今回の授業における数学の楽しさを感じさせる場面の一つが、ここにあったと言える。 《子どもたちの感想②》のH

##### 3-1-2 数学の奥深さに気づけたか。

###### ③「自然対数の底『 $e$ 』の不思議（接線）」について

全員に美しさを発見させるためのチャンスを与えたのだが、時間が短かったこともあり、既習経験の身に付き方が、ここでの美しさの感じ方の違いに繋がったようである。発見できたE「グラフの接線が1ずつの間隔でx軸に落ちていくことがすごくきれいだと思った。」発見できなかったF「x軸に等間隔で接線が落ちているのに気づけなくてショックだった。」しかしながら「美しさ」を友と共有し、その「美しさ」に潜む理由を考えることが、より発展的な課題となる。「美しさ」を感じることとその理由を考えることの2本立てで取り組むことで、「何故？」がわかった後にその美しさがもう一度感じられるのである。また、数学の「美しさ」を友と共有する体験は修学旅行などで寝食を共にして体験する喜びと共通の充実感がある。この喜びがもっと深く追究したいという気持ちに繋がるのである。



#### ④「自然対数の底『e』の不思議（テイラー展開）」について

この課題は、②1万円はどこまで増える？とは違い、最初から「e」であることはわかっている課題である。しかしながら、自分たちで「e」を求めたということでコンピュータや表で与えられたときより、「e」が自分たちに近い存在のものとなった。近似の経験も少ない中、グラフを提示した効果は相当あった。M「式だけ見ると近似には見えないけど実際にグラフにすると驚くほど近かった。」4次の近似から10次の近似ぐらいまでを提示した。10次の近似ではかなりしっかり近似されるので、リアルにテイラー展開の近似の凄さを感じられた。

#### 3-1-3 既習事項を利用し、数学的な考察が社会生活に有用であることが認識されたか

⑤不得意科目は点数を上げやすい！！（効用関数のお話）の感想や、全体を通した感想などからも見られるように、M「普段、感覚的に感じていることも数式にできるのはすごいと思った。」D「数学Ⅲまでとっていたおかげで、日常でおこりうる数学が分かってよかった。数学は生活する上でいらぬと言っている人がいるけれど、やっぱり数学はいろいろなことを考える原点である、ということが分かって良かった。」最近「数学Ⅲ」の中でも微分の公式が次々と登場する単元の学習が続いており、これが何の役に立っているのかが不明なまま、進んできた感があった。その意味では、経済分野、心理学分野から題材を取ったことは画期的であった。数学の有用性を感じた経験が、またその後に高度な学習に戻った際にも困難を乗り越える力となると考える。

#### 3-1-4 その他

関数電卓の数をもう少し増やすべきであった。最初は尻込みしていたが、自分も触りたかったという意見が感想から見られた。更に多くの場面でも、関数電卓の使えそうな場面があった。学習形態について、机を合わせるなどのグループ学習は、義務教育ではよく行われる。マシンの得意な子の周りで盛り上がるができる。後方の4人グループは結果的にグループ化して1台のマシンを中心に盛り上がっていた。

#### 《全体を通しての子どもたちの感想》

**A**数Ⅲまでとって良かったと思いました。また、頑張ろうと思いました。やっぱり数学は不思議だし、面白いと思いました。

**B**たまには生き抜きの授業もいいと思いました。勉強も楽しんだ方が覚えやすいということを改めて実感しました。

**C**いつもと違った感じの授業で面白かった。普段の授業より興味ももてた。

**D**数学Ⅲまでとっていたおかげで、日常でおこりうる数学が分かってよかった。数学は生活する上でいらぬと言っている人がいるけれど、やっぱり数学はいろいろなことを考える原点である、ということが分かって良かった。

**E**普段やらないことをできて違ったおもしろさを感じた。すごい電卓も使えて良かった。機会があったらまたこういう授業をやってみたい。

**F**発言できなくてショックだった。すごい電卓を使った。あれが欲しかったです。全体的に面白い授業だった。

**G**数Ⅲはいろいろなことに応用できてかなり便利だと思った。電卓を使いたかった。

**H**数Ⅲの複雑な式がこんな形で使われているんだとわかって良かった。数Cはグラフが書けることや新しい極方程式などは使い方がイメージできたからまだ良かったけれど、数Ⅲはあまりイメージできなかったから、今日の授業は本当に良かったと思った。

**I** 数学の楽しさを学べたのではないのでしょうか。

**J**一番最後の話には興味がわいた。心理学や経済学にも数学を使うことがあると分かった。

**K**こういった授業もおもしろかった。新たな発見や法則があつておもしろかった。

**L**普段の授業に比べてとてもおもしろかった。

**M**経済などの多くの分野に数学が利用されていることを改めて感じた。

**N**たまには頭を使わない授業も良いと思った。電卓の機能に驚いた。

### 3-2 まとめ

子どもたちは純粋に分かりたいという欲求をもって学習している。学んでいることの有用性を感じながら学び、そして高度な内容を理解できれば、自己肯定感が芽生え、楽しく学べる。もっと深く学びたいという知的好奇心が湧き、学びの好循環の中で一層の追究が可能になる。学習意欲が高まり、能動的な学びの形が形成されていくことは、生涯にわたって自己を高めたいという学びの姿に繋がる。「点数に響くから勉強する。」「評価されないと努力しない。」「受験に出るから覚えるけれど、受験が終わればもう関係ない。」などの受動的、その場しのぎの勉強とは対照的な学びの姿である。

実際のところ、この授業の取組には不安もあった。逆説的ではあるが、実際に受験を目前に控えた3年生が、定期考査や大学入試に出題されないような事柄を意欲的に学ぶことができるのか、受験に使える数学の授業の方を望んでいるのではないのか、などの心配があった。教師だけでなく、子どもたちは直感的に日常の文脈に近い内容は定期考査や大学入試に出題されないことを感じており、それは大方当たっている。実は、このことは日本の高等学校教育における本質的な問題なのであり、数学だけでなく、文系科目を含む他教科にも当てはまる問題である。受験に合格することが高等学校教育の目標であるかのような、狭い意味での教育目標の中だけで教育を捉えるのではなく、深く学問を究めることの楽しさ、心地よさを子どもたちに伝え、生涯にわたって次々と学びたい気持ちを湧き起こすような教育がなされるべきである、と考える。

一般的には高等学校の数学よりも、小中学校の算数・数学の方が日常的な文脈に乗りやすいと考えられてきた。しかしながら、高度な数学を学ぶからこそ、日常の複雑な文脈について分析できるようになるのであり、高等学校教員はそれをもっと自覚するべきであると自省している。高等学校ならではの高度な数学を用いて、身近な問題を解決した経験によって、自ら学ぶようになった子どもたちは、学問の本当の喜びは高度な内容にまで進まない限りは味わえないということを知り、受験勉強は受験のための勉強ではないことを知る。今回はそれを実証するための研究授業を試みた。子どもたちの評価からみて、実証できたと考える。

なお、子どもたちの感想を多く掲載したのは、理数の楽しさ・面白さを味わわせる「授業」には理数の楽しさ・面白さを味わい努力した子どもに対する正当な「評価」がなされるべきであると考えたからである。「授業」と「評価」はセットであり、数学の教師はこれまで数値化できる成果のみにとられすぎており、数値化し難い学びの「評価」に目を背けてきた。美術、書道などの芸術や体育の教師がもつ評価の物差しについて学ぶところがあるのではないかと考える。「理数の面白さや深く追究する楽しさなどを味わわせる」ための授業が多く展開されるためには、我々、数学教師が、それに見合った「評価」の指標をもつことが大切である。子どもたちの成長に対してどのような「評価」をもって今後の学びに繋げていくのかが課題である。

### 4 参考文献・参考資料一覧

小林道正 『図解入門 よくわかる 微分積分の基本と仕組み』 秀和システム（2005）

岡部 恒治 『微分・積分のしくみ（入門ビジュアルサイエンス）』 日本実業出版社（1998）